|  |  |
| --- | --- |
| Муниципальное общеобразовательное учреждение – средняя общеобразовательная школа имени Маргариты Калининой  (МОУ-СОШ им. Маргариты Калининой) | |
|  | |
| УЧЕБНО - ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ РАБОТА  ПО МАТЕМАТИКЕ | |
| ТЕМА: ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ ТРЕУГОЛЬНИКА | |
|  | Выполнил  Мельников Омар Камальевич  Класс: 10 |
|  | Научный руководитель  Загрядская Елена Павловна  Должность: учитель математики |
| г. Клин, 2025 г. | |

Оглавление:

Введение………………………………………………………………………..3

Глава 1. Треугольник, элементы треугольника, виды треугольника……....5

Глава 2. Замечательные точки треугольника, изучаемые в школе………....5

Глава 3. Замечательные точки треугольника, не изучаемые в школе……....9

* Прямая Эйлера…………………………………………………………..9
* Окружность Эйлера (окружность девяти точек)……………………..10
* Точка Фейербаха ………………………………………………………11
* Точка Ферма……………………………………………………………13
* Точка Нагеля……………………………………………………………14
* Сборник задач повышенной сложности……………………………...16

Заключение…………………………………………………………………….19

Список литературы……………………………………………………………20

Приложение 1………………………………………………………………….21

Приложение 2………………………………………………………………….21

Приложение 3………………………………………………………………….22

Приложение 4………………………………………………………………….22

Приложение 5………………………………………………………………….23

Введение

Выбор темы «Замечательные точки треугольника» обусловлен моими личными интересами. На уроках геометрии мы познакомились с 4 замечательными точками треугольника: это точки пересечения медиан, высот, биссектрис и серединных перпендикуляров. Я заинтересовался этой темой и решил выяснить, есть ли еще у треугольника особые точки, когда и кем они были открыты, как строить такие точки, какие задачи я смогу решать, опираясь на полученные знания?

**Актуальность моей работы** заключается в расширении знаний о треугольнике и возможности решать задачи повышенной сложности. Более того, являясь учеником 10 класса, я хочу хорошо подготовиться к единому государственному экзамену по математике. Моё исследование выходит за рамки школьной программы по геометрии и поможет мне найти новые подходы к решению задач по геометрии. **Цель моей работы**: исследовать треугольник на его замечательные точки.

Задачи:

1. Изучить литературу по данному исследованию.
2. Изучить замечательные точки треугольника, выполнить их классификацию.
3. Произвести исследование «Построение различных замечательных точек треугольника».
4. Решить задачи повышенной сложности по данной теме.
5. Составить сборник задач по данной теме.

Объект моего исследования: треугольник.

Предмет моего исследования: замечательные точки треугольника.

Гипотеза проекта: умение находить замечательные точки в любом треугольнике позволяет решать геометрические задачи различного уровня

**Методы исследования**:

Поисковый метод: я изучил учебную и научную литературу по этому вопросу, работал с интернет источниками.

Исследовательский метод: я самостоятельно решал задачи с применением различных доказательств и рассуждений по данному вопросу.

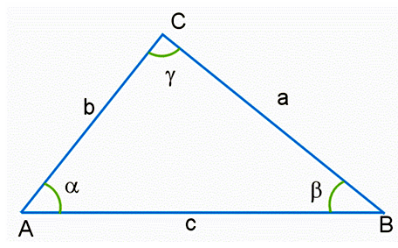
Практический метод: я провёл мастер-класс в своей школе и составил буклет.

**Практическая значимость** моей работы заключается в возможности применения данных знаний при решении различных задач, в том числе и задач практического характера

**Работа состоит из трёх глав**. В первой главе я рассказываю о об элементах и видах треугольника, во второй главе – о замечательных точках треугольника, изучаемых в школе, в третьей главе – о замечательных точках треугольника, не изучаемых в школе. Свои исследования я сопровождаю рисунками и чертежами.

Основная часть

**Глава 1. Треугольник**



«Треугольник — это структура, которая сильно воздействует на человеческое сознание.»

Карл Юнг

Рис.1

Треугольник – геометрическая фигура, образованная тремя точками, не лежащими на одной прямой, которые соединены между собой отрезками

(рисунок 1).

**Элементы треугольника ABC:**

Вершинами являются точки A, B и C. Сторонами треугольника являются отрезки AB, BC, AC. Углами являются α , β, γ.

Классифицировать треугольники можно на два типа ( Приложение 1)

**По углам:**

- остроугольный, если все три его угла – острые, то есть меньше 90°;

- тупоугольный, если один из его углов – тупой, то есть больше 90°;

- прямоугольный, если у него есть прямой угол, то есть угол в 90°.

**По сторонам:**

- Равнобедренный, если у него две стороны равны. Эти равные стороны называются боковыми сторонами, а третья сторона называется основанием треугольника.

- Равносторонний треугольник -у которого все стороны равны.

- Разносторонний треугольник [ 1 ]

**Глава 2. Замечательные точки треугольника, изучаемые в школе.**

Замечательные точки треугольника — точки, местоположение которых однозначно определяется треугольником и не зависит от того, в каком порядке берутся стороны и вершины треугольника. Обычно они расположены внутри треугольника, но и это не обязательно. [ 5 ]

**Точка пересечения высот (ортоцентр)**

Высотой треугольника называют перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на противоположную сторону или ее продолжение. [ 2 ]

В каждом треугольнике имеется три высоты. В треугольнике они пересекаются в одной точке и эту точку называют ортоцентром треугольника – это основное свойство высот. В остроугольном треугольнике ортоцентр лежит внутри треугольника, в прямоугольном – совпадает с вершиной прямого угла, а в тупоугольном треугольнике – находится вне треугольника на пересечении продолжений высот. С помощью построений можно проверить, что расположение ортоцентра треугольника, как и расположение  его высот, зависит от вида треугольника. У остроугольного треугольника  ортоцентр находится  внутри треугольника. Сложнее строить высоты других треугольников:

|  |  |
| --- | --- |
| vyisota v treugolnike  Рис. 2 (а) У прямоугольного треугольника (рис.2а) ортоцентр расположен в вершине прямого угла  (где катеты пересекаются с высотой, проведенной к гипотенузе) | peresechenie vyisot treugolnika  Рис.2 (б) У тупоугольного треугольника  ортоцентр точка Н - находится  с  внешней стороны, снаружи  треугольника  за вершиной тупого угла (рис.2б) |

Проанализировав  варианты построения   высот в треугольниках, получаем

вывод: расположение ортоцентра  треугольника  зависит  от вида треугольника. В частности, чем больше в треугольнике тупой угол, тем дальше (удалённее) от его  вершины  расположен ортоцентр, и тем  меньше высота  из вершины этого угла. Учеными доказано  интересное  свойство ортоцентра,  которое  формулируется  так:

|  |
| --- |
|  |
| |  |  | | --- | --- | |  | Точка пересечения биссектрис  треугольника А1В1С1, вершины  которого являются основаниями  высот  внешнего треугольника АВС (рис. 3), совпадает с точкой пересечения высот  этого треугольника - точкой  Н. | |  |

Рис.3

**Точка пересечения медиан (центроид)**

Медианой треугольника называют отрезок, соединяющий его вершину с серединой противолежащей стороны. [ 2 ] На рис.4 - медианы АЕ, BF, CD

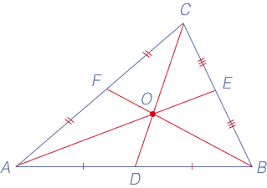


Рис.4

В любом треугольнике медианы пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2 : 1, считая от вершины – это является основным свойством медиан.

Точка пересечения медиан треугольника имеет простой физический смысл: она является его центром масс. Представим, что треугольник нарисован на жесткой, но практически невесомой пластине и в его вершинах укреплены три тяжелых шарика одинаковой массы. Из физики известно, что в плоскости треугольника найдется такая точка М, что если подвесить за нее пластинку с шариками, то вся система будет пребывать в равновесии, то есть, как бы ее ни расположить, она будет оставаться неподвижной в том положении, в котором мы ее отпустим. [ 4 ]

Важным свойством точки пересечения медиан является тот факт, что сумма векторов, началом которых является точка пересечения медиан, а концами – вершины треугольника, равна нулю.

**Точка пересечения биссектрис (инцентр)**

Биссектрисой треугольника называют отрезок прямой, делящей угол при вершине на две равные части. [ 5 ] На рис.5 – биссектрисы ВО, СО, АО.

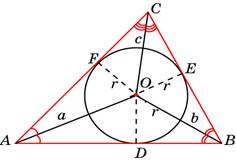


Рис.5

Точка пересечения биссектрис – центр вписанной окружности. Биссектриса внутреннего угла треугольника есть геометрическое место точек, равноудаленных от сторон этого угла.

**Точка пересечения серединных перпендикуляров (медиатрисс)**

Серединный перпендикуляр к стороне треугольника есть геометрическое место точек, равноудаленных от ее концов[ 2 ] (Рис.6).

|  |  |
| --- | --- |
| https://fsd.multiurok.ru/html/2021/10/29/s_617c21653c3f2/phpl8sQjV_Proekt.-Zamechatelnye-tochki-treugolnika_html_76023bc8ef56500d.gif | Точка пересечения серединных перпендикуляров будет равноудалена от концов каждой из двух сторон, т.е. от всех вершин треугольника. Это и означает, что она является центром описанной около треугольника окружности. |

Рис.6

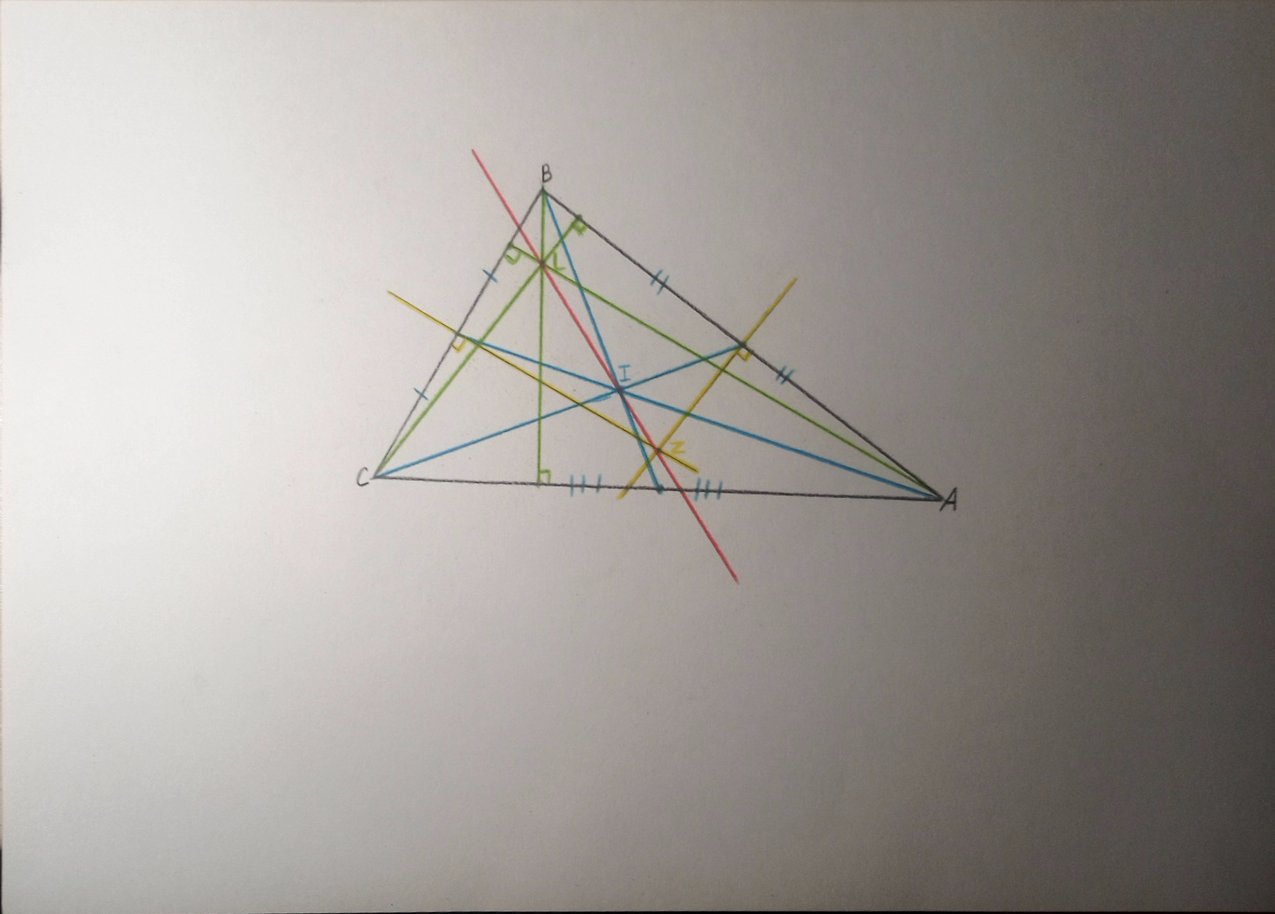
**Свойства треугольников**

**(равнобедренный и равносторонний треугольники)**

|  |  |
| --- | --- |
| Равнобедренный  треугольник  Рис.7  https://fsd.multiurok.ru/html/2021/10/29/s_617c21653c3f2/phpl8sQjV_Proekt.-Zamechatelnye-tochki-treugolnika_html_5c7cae23b9ce57ea.gif | Свойства этого треугольника (рис.7):  -Т.к. углы при основании равны, то и равны биссектрисы, медианы и высоты, проведённые из этих углов. Биссектриса, медиана и высота, проведенные к основанию совпадают между собой.  -Центры вписанной и описанной окружностей лежат на этой линии. |
| Равносторонний треугольник:  Рис.8  https://fsd.multiurok.ru/html/2021/10/29/s_617c21653c3f2/phpl8sQjV_Proekt.-Zamechatelnye-tochki-treugolnika_html_37c21782bdba8ed1.gif | Свойства этого треугольника (рис.8):  -Каждая из высот является одновременно биссектрисой и медианой.  -Центры описанной и вписанной окружностей совпадают. |

**Глава 3. Замечательные точки треугольника, не изучаемые в школе.**

**Прямая Эйлера**

 Рисунок 9

Теорема:

Пусть Z — центр описанной окружности треугольника ABC, I — точка пересечения медиан, L — ортоцентр. Тогда точки Z, I и L лежат на одной прямой, причем Z I: I L = 1: 2. ( рис.9) [ 3]

Следствие:

Расстояние от вершины треугольника до его ортоцентра в два раза больше, чем расстояние от центра его описанной окружности до середины противолежащей стороны.

Также, на прямой Эйлера, лежит центр окружности 9 точек, т.е. окружности Эйлера.

**Окружность Эйлера (окружность девяти точек)**

Окружностью девяти точек называют окружность, описанную около срединного треугольника (треугольника, образованного серединами сторон данного треугольника) ( рис.10) . Также эту окружность называют окружностью Эйлера (Леонард Эйлер в 1765 году доказал её существование) и окружностью Фейербаха (Карл Вильгельм фон Фейербах в 1822 году доказал, что эта окружность касается вписанной окружности треугольника). [1]

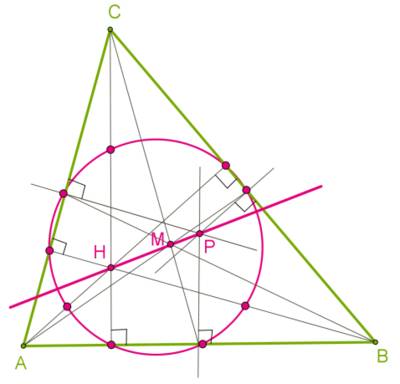


Рисунок 10

Утверждение 1

Точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно его сторон, лежат на описанной окружности этого треугольника.

Утверждение 2

Точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно середин его сторон, лежат на описанной окружности этого треугольника.

Утверждение 3

Расстояние от вершины треугольника до его ортоцентра в два раза больше, чем расстояние от центра его описанной окружности до середины противолежащей стороны.

Следствие:

Радиус окружности девяти точек в два раза меньше радиуса описанной окружности треугольника.

**Точка Фейербаха**

Точка Фейербаха (Теорема Фейербаха) — точка касания вписанной окружности к окружности девяти точек треугольника. Точка Фейербаха получила свое название в честь великого математика Карла Вильгельма Фейербаха (1800 – 1834), немецкого математика, младший брат которого был знаменитый немецкий философ Людвиг Фейербах. Карл был преподавателем гимназии в небольшом университетском городе Эрланген на юге Германии. В 1822 году ученый доказал, что окружность девяти точек касается вписанной окружности и трех вневписанных окружностей ( рис.11)

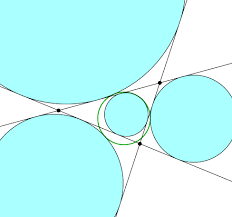


Рис. 11

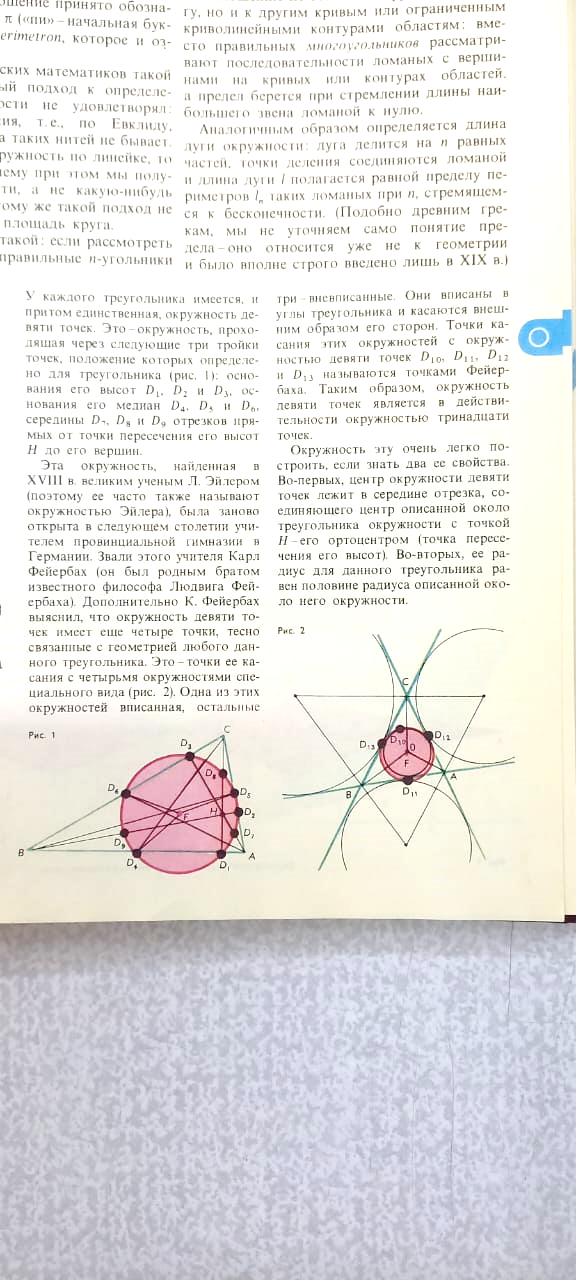
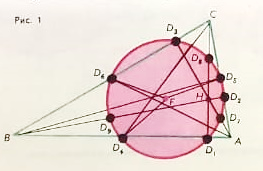


Рисунок 12 Рисунок 13

Также ученый Фейербах выяснил, что окружность девяти точек (рисунок 12) имеет еще четыре точки, тесно связанные с геометрией любого данного треугольника. Это точки ее касания с четырьмя окружностями специального вида. Одна из этих окружностей вписанная, остальные три вневписанные. Они вписаны в углы треугольника и касаются внешним образом его сторон. Точки касания D10 D11 D12 и D13 этих окружностей с окружностью девяти точек называются точками Фейербаха (рисунок 13). Таким образом, окружность девяти точек является в действительности окружностью тринадцати точек. [ 1 ]

Я построил точку Фейербаха, результат построения привожу в приложении 2

Для построения точки Фейербаха я руководствовался следующим алгоритмом:

1. Постройте треугольник ABC с заданными сторонами.

2. Найдите точки касания вневписанных окружностей со сторонами треугольника.

3. Постройте окружность Эйлера, из указанных выше объяснений в её построении, и найдите точки касания окружности Фейербаха с точками касания вневписанных окружностей.

4. Постройте вписанную окружность и найдите так же точку касания этой окружности к окружности Эйлера.

Я выяснил, что точка Фейербаха обладает следующими свойствами:

1. Описанная окружность: точка Фейербаха является центром описанной окружности треугольника. Радиус этой окружности равен сумме радиусов вписанной и описанной окружностей треугольника.

2. Вписанная окружность: точка Фейербаха является точкой касания всех трех сторон треугольника со вписанной окружностью. Расстояния от точки Фейербаха до вершин треугольника равны радиусу вписанной окружности.

3. Отношение расстояния от точки Фейербаха до вершины треугольника к соответствующей стороне равно радиусу вписанной окружности треугольника.

Это лишь некоторые из свойств, которыми обладает точка Фейербаха в треугольнике.

**Точка Ферма.**

Точка Ферма — точка плоскости, сумма расстояний от которой до вершин треугольника является минимальной. Точка Ферма получила свое название в честь великого математика из XVII века — Пьера де Ферма (Pierre de Fermat). Он родился в 1601 году в городе Беже во Франции, и стал одним из наиболее влиятельных и известных математиков своего времени. Точка Ферма также называется точкой Ферма-Торричелли, в честь итальянского физика Эвелина Торричелли, который первоначально ввел эту концепцию. [ 7 ] Я построил точку Ферма и результат построения привожу в приложении 3. При построении руководствовался следующим алгоритмом:

1. Постройте треугольник ABC с произвольными сторонами.
2. Постройте на сторонах треугольника вне него равносторонние треугольники.
3. Соедините отрезком каждую вершину треугольника с вершиной равностороннего треугольника, построенного на противоположной стороне.
4. Постройте точку пересечения этих отрезков. Это искомая точка.

Я выяснил, что точка Ферма обладает следующими свойствами:

|  |  |
| --- | --- |
| 1.Каждая из сторон треугольника из точки Ферма видна под углом 120 градусов ( рис.14)    ( рис.14 | 2.Если один из углов треугольника равен 120 градусов, то точка Ферма совпадет с вершиной треугольника  ( рис. 15)    ( рис. 15) |

|  |  |
| --- | --- |
| ( рис. 16) | Окружности, описанные около правильных треугольников пересекаются в точке Ферма (рис. 16) |

Пример применения точки Ферма в жизни:

|  |  |
| --- | --- |
| Источник: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/1/1a/Ferma_Point_Experimental_Solution.png/440px-Ferma_Point_Experimental_Solution.png  ( рис. 17) | Если отметить на плоской гладкой горизонтальной поверхности точки E, L и C и просверлить в отмеченных местах сквозные отверстия; связать три гладкие веревки и пропустить сверху их свободные концы через отверстия; привязать к свободным концам грузики одинаковой массы. |

Когда построенная система придет в равновесие, то узел окажется в точке Ферма для треугольника ELC (рис. 17)

Таким образом, точка Ферма обладает рядом интересных и полезных свойств, которые могут быть применены в геометрии и других областях математики. [7]

**Точка Нагеля.**

Точка Нагеля — точка пересечения отрезков, соединяющих вершины

[треугольника](https://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/8313) с точками [касания](https://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/75714) противоположных сторон с соответствующими[вневписанными окружностями](https://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/848792). Точка Нагеля была названа в честь французского математика Жан-Пьера Нагеля (1815-1892), известного геометра и инженера, который сделал значительный вклад в различные области геометрии. Родился Нагель во Франции и учился в École Polytechnique в Париже, где он изучал математику и инженерию. Наибольшую известность Нагель получил благодаря своим работам в геометрии. [ 6 ]

Я построил точку Нагеля, результат построения привожу в приложении 4.

Я действовал по следующему алгоритму:

1. Постройте треугольник ABC.

2. Найдите точки касания вневписанных окружностей со сторонами треугольника. Обозначьте эти точки D, E и F, где D — точка касания вневписанной окружности с стороной BC, E — с стороной CA, а F — с стороной AB.

3. Проведите линии, соединяющие вершины треугольника с соответствующими точками касания. То есть, проведите линии AD, BE и CF.

4. Найдите точку пересечения этих линий. Эта точка и будет точкой Нагеля (N).

Точка Нагеля имеет ряд интересных свойств:

1. Точка Нагеля лежит внутри треугольника ABC и делит каждую из линий, соединяющих вершины треугольника с точками касания вневписанных окружностей, в одном и том же отношении.

2. Сумма расстояний от точки Нагеля до сторон треугольника равна сумме радиусов вневписанных окружностей..

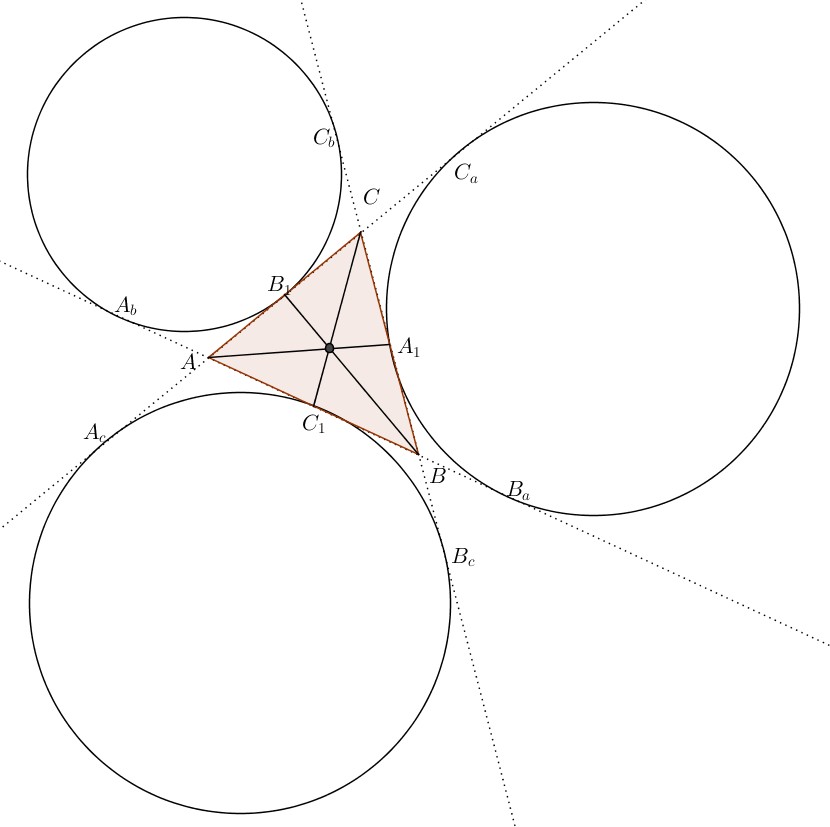
3. Середины отрезков между точками касания вневписанных окружностей с треугольником и точкой Нагеля, образуют прямоугольный треугольник.

4. Точка Нагеля является вершиной вневписанного треугольника. Вневписанный треугольник – это треугольник, вершинами которого являются точки касания вневписанных окружностей с треугольником.

5. Если провести линию, соединяющую точку Нагеля с центром окружности, описанной около треугольника (описанной окружности), то эта линия перпендикулярна стороне треугольника, противолежащей точке пересечения этой линии с окружностью.

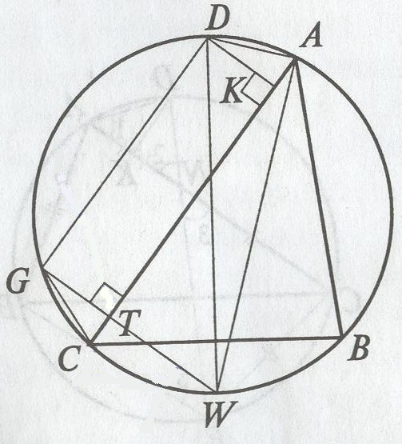
**Сборник задач повышенной сложности**

**Задача 1.** Докажите, что прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания вневписанных окружностей на противоположных сторонах, пересекаются в одной точке (точка Нагеля). [8]



Задача 2.

Доказать, что проекция диаметра описанной окружности, перпендикулярного первой стороне треугольника, на прямую, которая содержит другую сторону, равна по длине третьей стороне.

Доказательство:

Пусть DW – диаметр окр. и DW┴BC.

BC=a, AC=b.

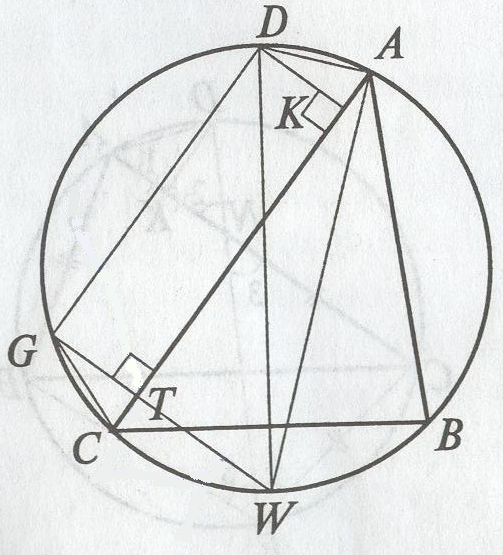
DK┴b; TW┴b.

Т.к. дуга GD равна дуге AB, то:

TK=AB=с

AC║GD, т.к. угол WGD равен 90, и DG=AB=c. TK=AB=DG=c.

Доказано.

Задача 3.

Найти длины отрезков CT и AT.

Решение:

Т.к. CT=AK и, по теореме

Архимеда:

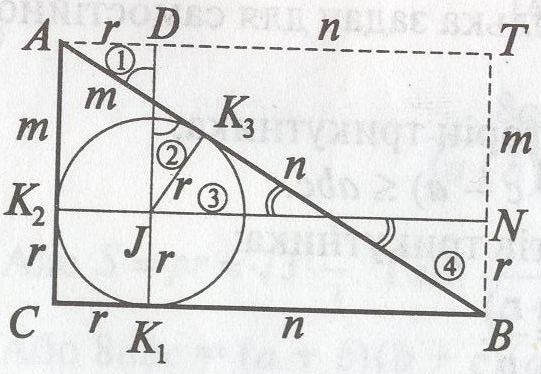
CK=AK=AB или , то:

AT=CK=

CT=AC – AT=b - =

Ответ:AT= , CT=

Задача 4.

Точка касания окружности, вписанной в ∆ABC, делит сторону BC на отрезки m и n. Доказать, что .

Доказательство:

Из прямоугольного ∆AJK3:

.

Но AK2=AK3=p-a; BK1=BK3=p-b=n;

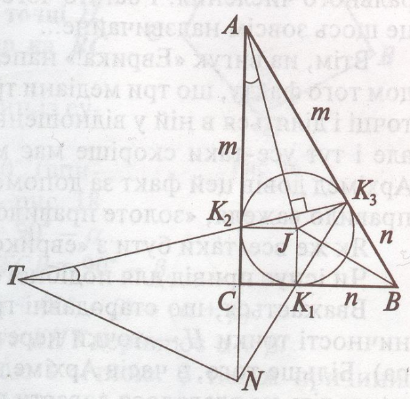
CK1=CK2=p-c=m.

Тогда: , или .

S=mn можно вывести из формулы . , при A= 90.

Доказано.

Задача 5.

В прямоугольном ∆ABC C=90. Прямая ; . Доказать, что STCN в два раза меньше SABC.

Решение:

Пусть AK3 = AK2 = m

BK3 = BK1 = n

ΔAJK2=ΔTK2C (по 2-ому признаку равенства треугольников)

Тогда TC = m

ΔBJK1=ΔNK1C (по 2-ому признаку равенства треугольников)

CN = n

SABC = mn; STCN = ; STCN=SABC

Доказано.

**Заключение**

В ходе проделанной работы я достиг поставленной цели: узнал, существуют ли больше, чем 4 замечательных точек в треугольнике, и научился применять эти знания.

Были решены следующие задачи: я изучил литературу по данному исследованию, изучил замечательные точки треугольника, выполнил их классификацию и описал свойства, произвел исследование «Построение различных замечательных точек треугольника», решил задачи повышенной сложности по данной теме и объединил их в сборник для закрепления знаний по теме.

С помощью исследований данной темы я пришёл к выводу: существует много особых точек треугольника и некоторые из них очень интересны, а также я научился решать более сложные задачи по геометрии.

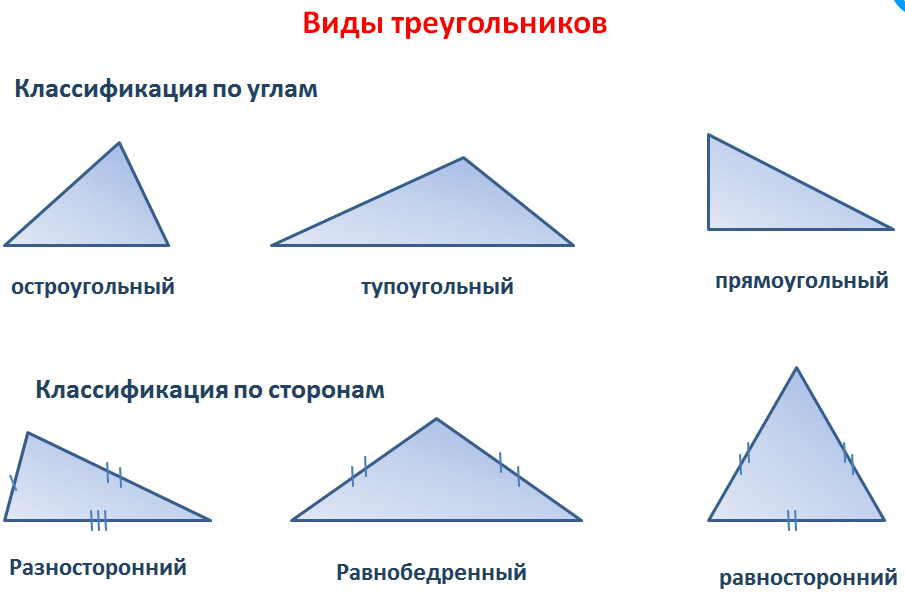
Я планирую продолжить исследование. Моя цель – найти практическое применение свойств каждой точки, например свойств точки Ферма при строительстве дорог с наименьшей затратой ресурсов. Планирую сделать экспериментальное построение точки Ферма. Я хочу стать инженером и считаю, что все полученные знания будут нужны при получении профессии.

**Список литературы**

1. «Энциклопедический словарь юного математика»/ Составитель А.П.Савин.- Москва, «Педагогика», 1985г -352 с.. ил..- с. 225
2. Геометрия. 7-9 классы: учебник для общеобразоват. учреждений: базовый и профильный уровни/ [Атанасян Л.Н., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др.] –20 изд. М. Просвещение, 2013- 383 с. Ил.- ISBN 978-5-09-024881-5
3. Геометрия, 10-11 классы: учебник для общеобразоват. учреждений: базовый и профильный уровни/ [Атанасян Л.Н., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др.] –20 издание М. Просвещение, 2011- 255 с. Ил.- ( МГУ- школе) ISBN 978-5-09-024966-9
4. Коксетер Г. С., Грейтцер С. Л. «Новые встречи с геометрией» [Текст]. – М.: Наука, 1978, Перевод: Анатолий Савин, Л. Савина Язык: Русский Мягкая обложка, 224 стр. Тираж: 148000 экз. Формат: 84x108/32 (130х200 мм)
5. Смирнов В.А., Смирнова И.М. Сайт современного учебно-методического комплекта по геометрии. [сайт] / <http://www.geometry2006.narod.ru/>

(дата обращения: 15.01.2024). — Текст. Изображение : электронные.

1. Смирнова И.М, Смирнов В.А. «Геометрия. Нестандартные и исследовательские задачи», учебное пособие 7 -11, Москва, Мнемозина, 2004 г.- 172 стр., ил.
2. Википедия: [сайт]-URL: <https://clck.ru/37ierU> (дата обращения: 20.12.2023). — Текст. Изображение : электронные.
3. Международный математический Турнир городов: официальный сайт.-Москва -1996- URL https://www.turgor.ru/lktg/2017/2/2-1ru-sol. (дата обращения: 20.10.2023). — Текст. Изображение : электронные.
4. РЕШУ ЕГЭ – СДАМ ГИА[сайт]-URL <https://ege.sdamgia.ru> (дата обращения: 14.01.2024) — Текст. Изображение : электронные

Приложение 1

Приложение 2. Построение точки Фейербаха ( точки D1;D2;D3;D4) – рис.19

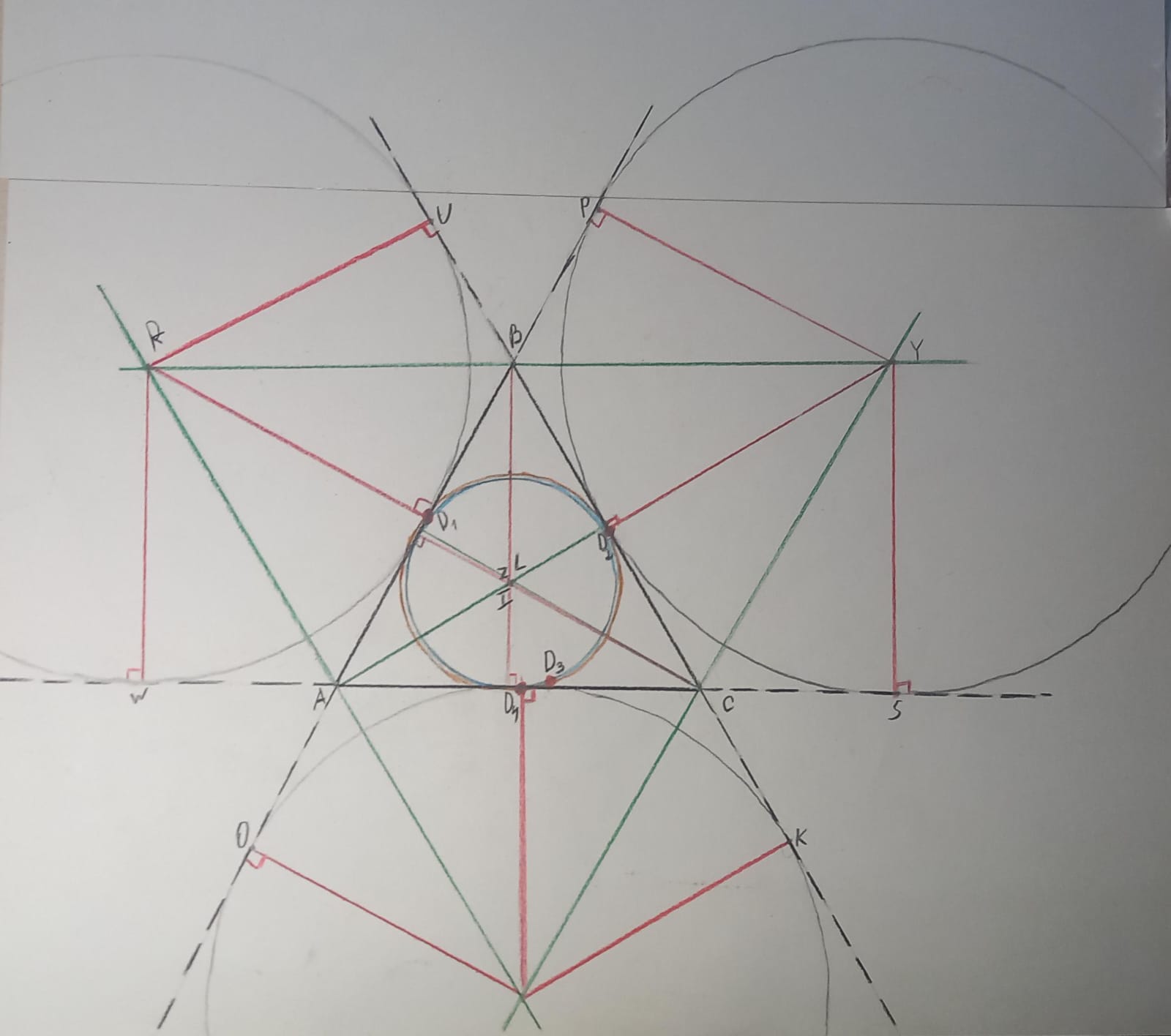


Рисунок 19

Приложение 3. Построение точки Ферма ( точка S) - рисунок 20

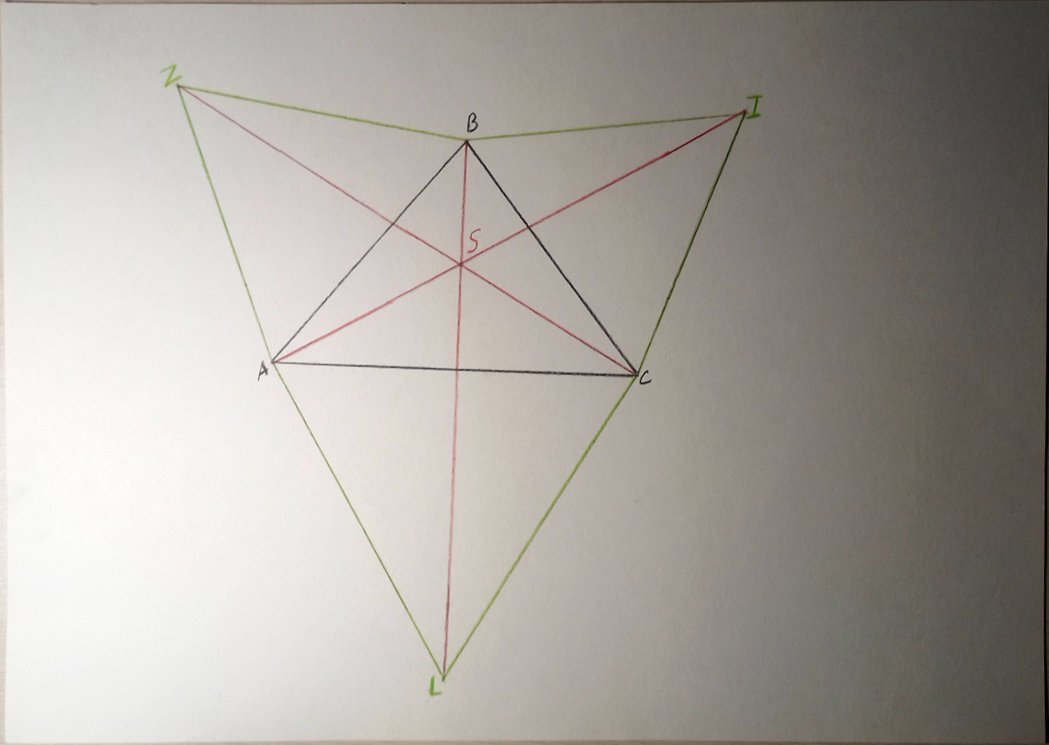


Рисунок 20

Приложение 4. Построение точки Нагеля (точка N) - рисунок 21

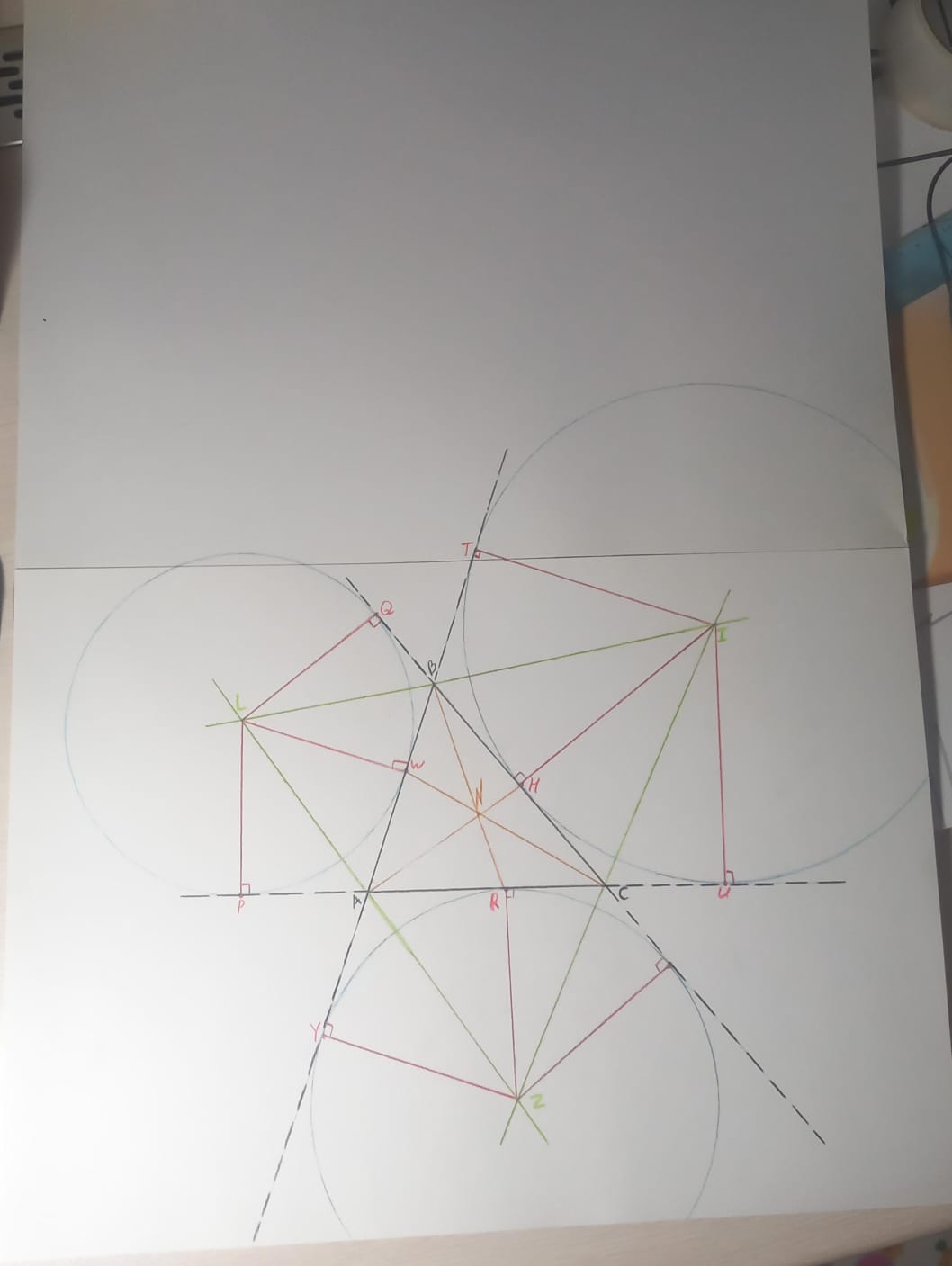
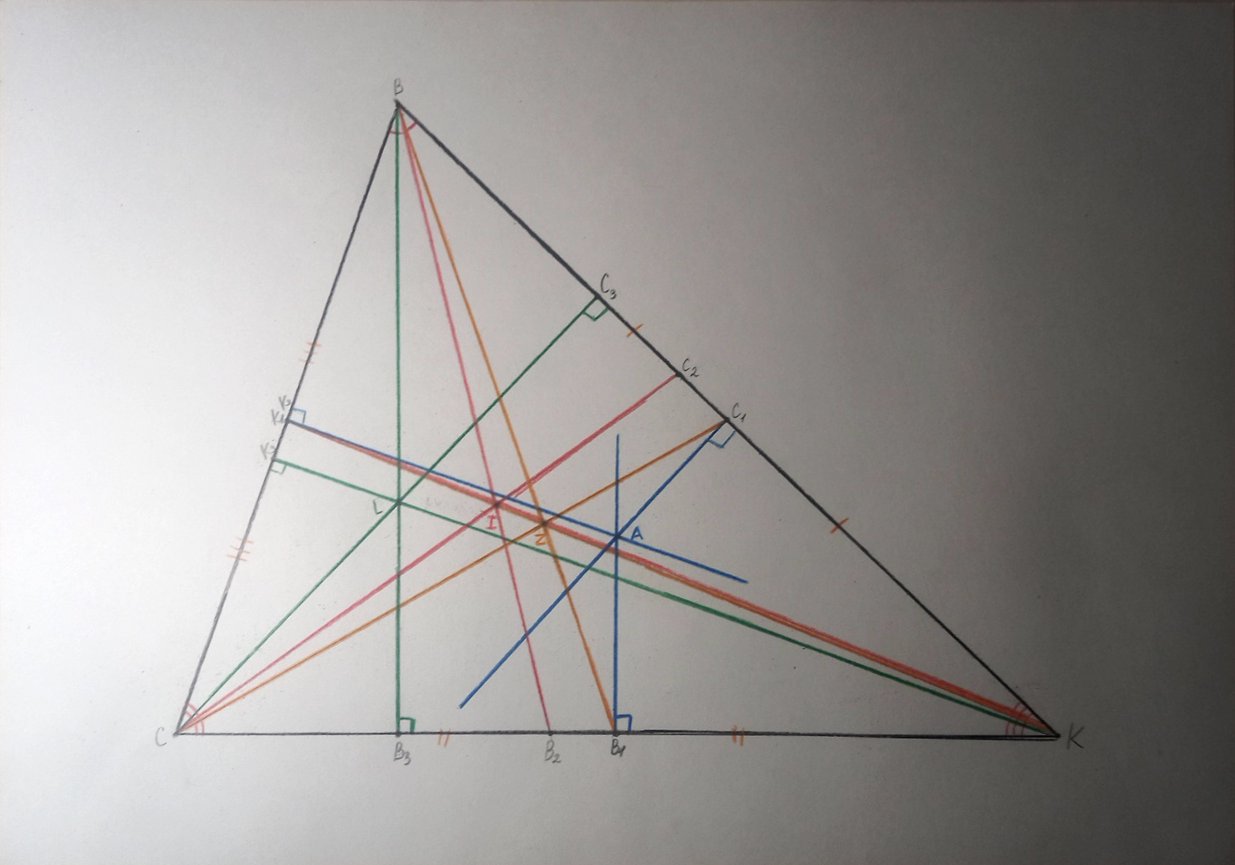


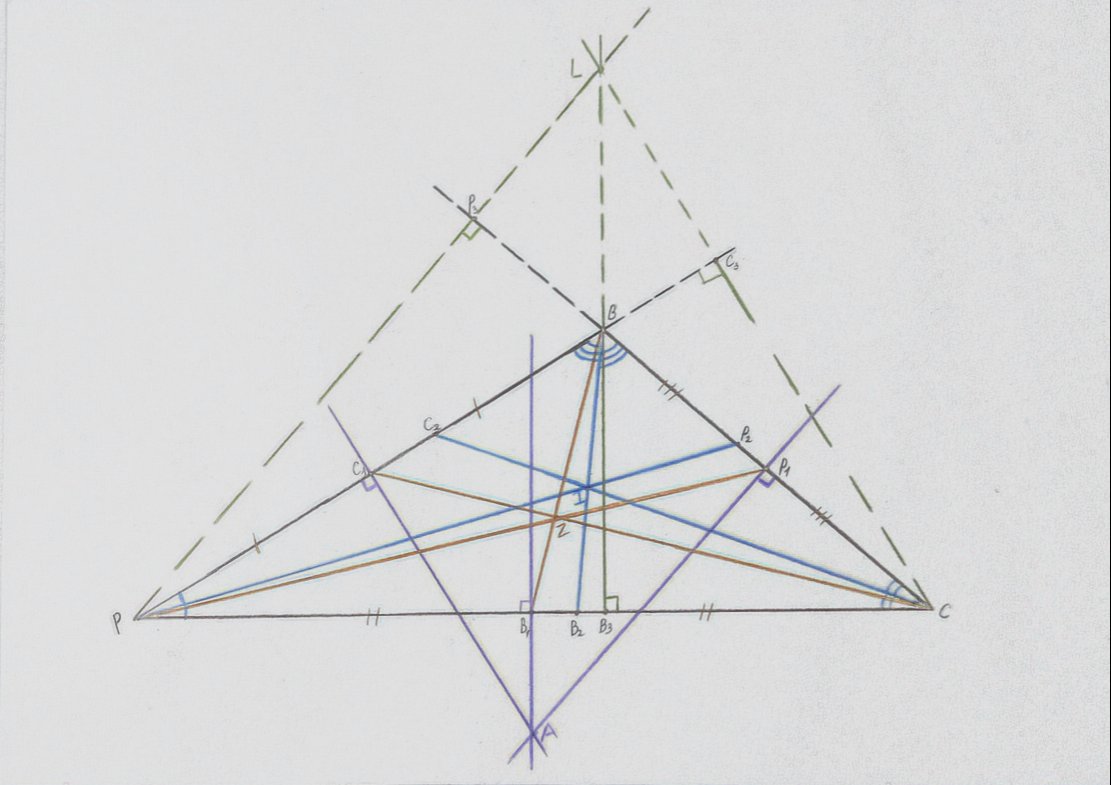
Рисунок 21

Приложение 5. Материалы для демонстрации построений замечательных точек треугольника в остроугольном треугольнике (рисунок 22),

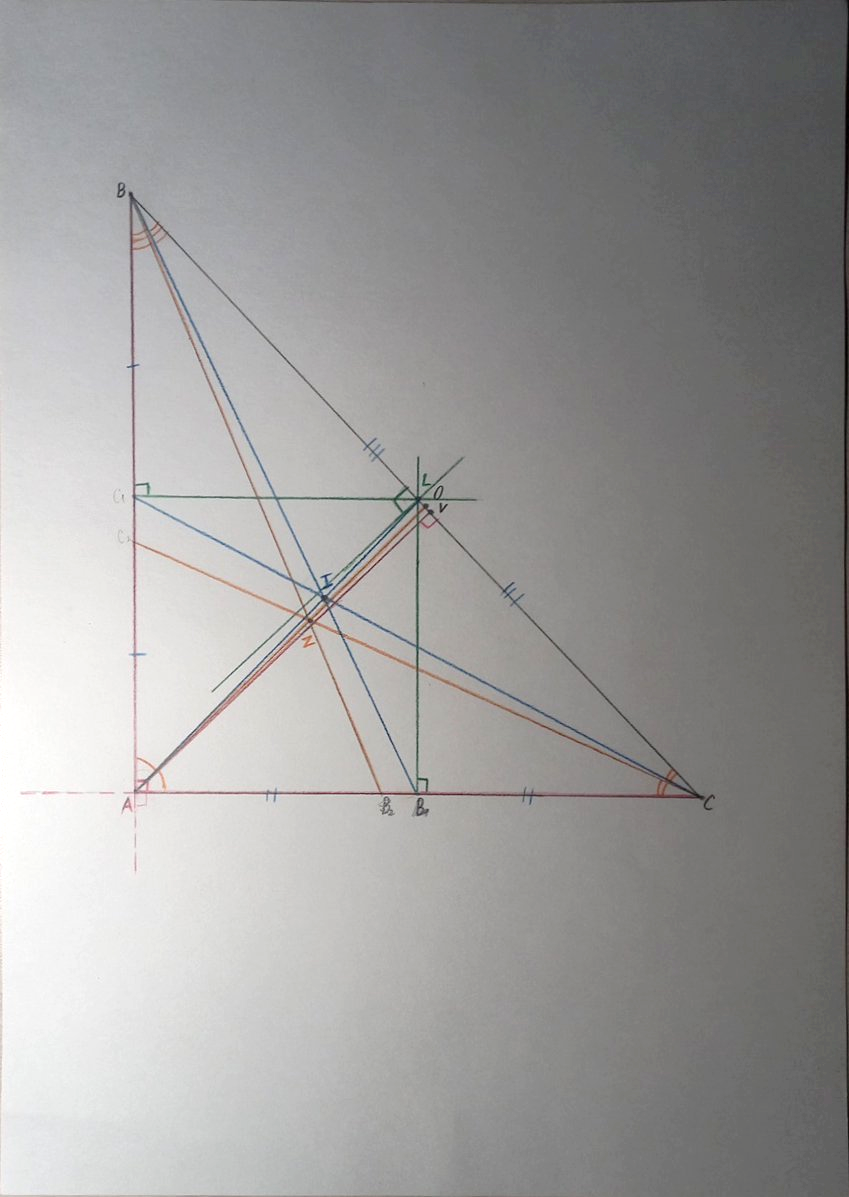
в тупоугольном треугольнике (рисунок 23), в прямоугольном треугольнике (рисунок 24).



(рисунок 22)



(рисунок 23)



(рисунок 24)